Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер. Жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі. Әдістемелік нұсқаулар.

Әзірлеген жоғары математика кафедрасының аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

10 - тақырып.Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер. Жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі. Әдістемелік нұсқаулар.

Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер.

1 - мысал.

$$y''' - y'' = 0 \Rightarrow \left| y'' = z, y''' = z' \right| \Rightarrow z' - z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = C_1 e^{\int dx} = C_1 e^x \Rightarrow y'' = C_1 e^x \Rightarrow y' = \int C_1 e^x dx + C_2 = C_1 e^x + C_2 \Rightarrow$$

$$y = \int \left[C_1 e^x + C_2 \right] dx \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 x + C_3$$

2 - мысал. Коши есебін шешіңіз:

$$xy'' - y' - x \sin \frac{y'}{x} = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Шешуі: Жаңа функция $y' = p,\ \ y'' = p'$ енгіземіз, теңдеудің екі жағын да x-ке бөліп, берілген теңдеу мына түрге келеді:

$$p' - \frac{p}{x} - \sin \frac{p}{x} = 0$$

немесе $p' = \frac{p}{x} + \sin \frac{p}{x}$.

Теңдіктің оң жағы $\frac{p}{x} + \sin \frac{p}{x}$ -нөлінші ретті біртекті функция, ендеше бұл біртекті дифференциалдық теңдеу. $p = zx, \ \ p' = z'x + z$ ауыстыруын жасаймыз. Онда:

$$z'x + z - z - \sin z = 0,$$

$$\text{яғни, } z'x - \sin z = 0$$

теңдеуін шешеміз. Айнымалыларды ажырату арқылы:

$$\frac{dz}{\sin z} = \frac{dx}{x} \quad \ln\left| tg \frac{z}{2} \right| = \ln x + \ln c_1, \qquad tg \frac{z}{2} = xc_1, \qquad z = 2arctgxc_1.$$

Теңдеудегі z -тің орнына жоғарыдағы ауыстыруларды қоятын болсақ: $p = zx, \ \ z = \frac{y'}{x}$, онда

$$y' = 2xarctgxc_1 \to \int dy = \int 2xarctgxc_1 dx.$$

Ары қарай бөліктеп интегралдасақ:

$$U = arctgxc_1,\ dU = \frac{c_1 dx}{1 + (xc_1)^2},\ dV = 2xdx, \ \ V = x^2,$$

$$y = x^2 arctgxc_1 - \int \frac{c_1 x^2}{1 + (xc_1)^2} dx = x^2 arctgxc_1 - \frac{1}{c_1} \int \frac{1 + c_1^2 x^2 - 1}{1 + (xc_1)^2} dx =$$

$$= x^2 arctgxc_1 - \frac{1}{c_1} x + \frac{1}{c_1^2} arctgxc_1 + c_2 = \left(x^2 + \frac{1}{c_1^2} \right) arctgxc_1 - \frac{1}{c_1} x + c_2 \text{ аламыз.}$$

Сонымен, берілген теңдеудің жалпы шешімі:

Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер. Жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі. Әдістемелік нұсқаулар.

Әзірлеген жоғары математика кафедрасының аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

$$y = x^2 arctgxc_1 - \frac{1}{c_1}x + \frac{1}{c_1^2}arctgxc_1 + c_2 \text{ немесе}$$

$$y = \left(x^2 + \frac{1}{c_1^2}\right)arctgxc_1 - \frac{1}{c_1}x + c_2 .$$

Теңдеудің дербес шешімін табу үшін бірінші табылған функцияның туындысын табамыз:

$$y' = 2xarctgxc_1 + \left(x^2 + \frac{1}{c_1^2}\right)\cdot\frac{c_1}{1 + x^2c_1^2} - \frac{1}{c_{1\,1}} .$$

Берілген $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = \frac{\pi}{2}$ бастапқы шартты ескерсек:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} = \left(1^2 + \frac{1}{c_1^2}\right)arctg1\cdot c_1 - \frac{1}{c_1}\cdot 1 + c_2 \\ \\ \frac{\pi}{2} = 2\cdot 1\cdot arctg(1\cdot c_1) + \left(1^2 + \frac{1}{c_1^2}\right)\cdot\frac{c_1}{1 + 1^2c_1^2} - \frac{1}{c_1} \end{cases}$$

Жүйенің соңғы теңдеуінен c_1 тұрақтысын анықтаймыз:

$$\frac{\pi}{2} = 2arctgc_1 + \frac{c_1^2 + 1}{c_1^2}\cdot\frac{c_1}{1 + 1^2c_1^2} - \frac{1}{c_1}, \qquad arctgc_1 = \frac{\pi}{4} \quad => \ c_1 = 1 .$$

Бірінші теңдеуден c_2 тұрақтысын анықтаймыз:

$$\frac{\pi}{2} = \left(1^2 + \frac{1}{1^2}\right)arctg1 - \frac{1}{1}\cdot 1 + c_2, \quad \frac{\pi}{2} = 2\cdot\frac{\pi}{4} - 1 + c_2, \quad c_2 = 1 .$$

Сонымен, $c_1 = 1, \quad c_2 = 1$.

Ендеше, ізделінді дербес шешім:

$$y = \left(x^2 + 1\right)arctgx - x + 1 .$$

3 - мысал.

$$yy'' - (y')^2 = y'$$

теңдеуін шешіңіз.

Жаңа функция енгіземіз:

$$y' = p\,;\, y'' = p'_y \cdot p \text{, онда}$$

$$ypp' - p^2 = p \Rightarrow p' - \frac{1}{y}p = \frac{1}{y} \Rightarrow p = e^{\int\frac{dy}{y}}\cdot\left(C_1 + \int\frac{1}{y}\cdot e^{-\int\frac{dy}{y}}dy\right) =$$

$$= y\left(C_1 + \int\frac{dy}{y^2}\right) = y\left(C_1 - \frac{1}{y}\right) = C_1y - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1y - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{C_1y - 1} = dx \Rightarrow \frac{1}{C_1}\cdot\ln\left|C_1y - 1\right| = x + C_2 .$$

4 - мысал.

$$y'' - 2yy' = 0$$

теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер. Жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі. Әдістемелік нұсқаулар.

Әзірлеген жоғары математика кафедрасының аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

Теңдеуді шешу үшін, жаңа функция енгіземіз $p(y) = y'$. Онда

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}, \qquad p\frac{dp}{dy} - 2yp = 0,$$

$$\frac{dp}{dy} - 2y = 0, \quad p = y^2 + c_1^2,$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + c_1^2, \qquad \int \frac{dy}{y^2 + c_1^2} = \int dx,$$

$$\frac{1}{c_1} arctg\frac{y}{c_1} = x + c_2, \qquad arctg\frac{y}{c_1} = c_1 x + c_2 c_1.$$

Сонымен, берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = c_1 tg\left(c_1 x + \overline{c}_2\right), \text{ мұндағы } \overline{c}_2 = c_2 c_1$$

3) $y^{(n)} = f(x)$ түріндегі, яғни, оң жағы тек x айнымалысына ғана тәуелді болатын дифференциалдық теңдеуді қарастырайық.

Онда $y = \int\int\ldots\int f(x)dxdx\ldots dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n$ - теңдеудің жалпы шешімі.

5 - мысал

$$xy''' = 2x + 3$$

теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі: Алдымен теңдеуді келесі түрге келтіреміз:

$$y''' = \frac{2x+3}{x}$$

Біртіндеп интегралдасақ:

$$y'' = \int \frac{2x+3}{x}dx = \int\left(2 + \frac{3}{x}\right)dx = 2x + 3\ln x + C_1,$$

$$y' = \int\left(2x + 3\ln x + C_1\right)dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x,\ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx,\ v = x_1 \end{array} \right| = x^2 + 3x\ln x - 3x + Cx_1 + C_2.$$

$$y = \int\left(x^2 + 3x\ln x - 3x + +Cx_1 + C_2\right)dx = \frac{x^3}{3} + 3\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}\right) - \frac{3x^2}{2} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\ln x - \frac{3x^2}{4} - \frac{3x^2}{2} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3 = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\ln x + \overline{C}_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3,$$

мұндағы $\overline{C}_1 = \frac{C_1}{2} - \frac{4}{3} - \frac{3}{2}$.

Жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер

6 - мысал

e^x, e^{-x}, e^{2x} функциялар жүйесі

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

теңдеуінің фундаментальдық шешімдер жүйесі болатынын көрсетіңіз және оның жалпы шешімін жазыңыз.

Шешуі: $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}, y_3 = e^{2x}$ функциялары мен оның туындыларын берілген теңдеуге қою арқылы олар теңдеудің шешімі болатынына көз жеткізуге болады. Оның вронскианы:

Ретін төмендетуге болатын жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер. Жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі. Әдістемелік нұсқаулар.

Әзірлеген жоғары математика кафедрасының аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т.

$$W\left(e^x, e^{-x}, e^{2x}\right) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{vmatrix} = e^x e^{-x} e^{2x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -6e^{2x} \neq 0.$$

Ендеше, e^x, e^{-x}, e^{2x} сызықты тәуелсіз функциялар және берілген теңдеудің фундаментальдық шешімдер жүйесін құрайды. Оның жалпы шешімі:

$$\widetilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}.$$

7 - мысал

Егер

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 2x + 1$$

теңдеуінің дербес шешімдерінің біреуі

$$y^* = x + 1$$

функциясы болса, онда оның жалпы шешімін жазыңыз.

Шешуі: Сәйкес біртекті дифференциал теңдеудің жалпы шешімі

$$\widetilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$$

белгілі болса, теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = \widetilde{y} + y^* \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + x + 1.$$

Кез келген тұрақтыны вариациялау әдісі

7 - мысал

Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$y'' - \frac{y'}{x} = x$$

Шешуі:

1) $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$ біртекті теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \Rightarrow ln\, y' = ln\, x + ln\, 2C_1 \Rightarrow y' = 2C_1 x \Rightarrow \widetilde{y} = C_1 x^2 + C_2.$$

2) теңдеудің дербес шешімін табамыз. Шешімді

$$y = C_1(x) \cdot x^2 + C_1(x)$$

түрінде іздейміз. Онда $y' = 2C_1 x + C_1' x^2 + C_2'$. y' өрнегі C_1' пен C_2' арқылы өрнектелмеуі керек болғандықтан, $C_1' x^2 + C_2' = 0$ деп аламыз, яғни, $y' = 2C_1 x$. y-ті (5)-ке қойып, екінші шартты табамыз. $y'' = 2C_1 + 2C_1' x$ болғандықтан,

$$2C_1 + 2C_1' x - \frac{2C_1 x}{x} = x \Rightarrow 2C_1' = 1.$$

$C_1(x)$ мен $C_2(x)$-ні табу үшін:

$$\begin{cases} C_1' = \dfrac{1}{2} \\ C_1' x^2 + C_2' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2} x + C_3 \\ C_2' = -\dfrac{1}{2} x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2} x + C_3 \\ C_2 = -\dfrac{1}{6} x^3 + C_4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\{\ \left|C_3 = C_4\right| \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2}x \\ C_2 = -\dfrac{1}{6}x^3 \end{cases}.$$

Сонымен, теңдеудің дербес шешімі $y^* = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{x^3}{6} = \dfrac{x^3}{3}$, ал жалпы шешімі –

$$y = C_1 x^2 + C_2 + \frac{x^3}{3}.$$

8 - мысал

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$$

теңдеуінің жалпы шешімін табыңыз.

Шешуі: Біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$\tilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}.$$

теңдеудің жалпы шешімін алу үшін, Лагранж әдісін қолданып оның y^* дербес шешімін табамыз:

$$y^* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x} + C_3(x)e^{2x}.$$

Біздің жағдайымызда жүйемына түрде болады:

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' e^{-x} + C_3' e^{2x} = 0 \\ C_1' e^x - C_2' e^{-x} + 2C_3' e^{2x} = 0 \\ C_1' e^x + C_2' e^{-x} + 4C_3' e^{2x} = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1} \end{cases}$$

Оның анықтауышы $W = -6e^{2x} \neq 0$. (9) жүйесін Крамер ережесін қолданып шешсек:

$$C_1' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x}{e^x+1};\ \ C_2' = \frac{1}{6}\cdot\frac{e^{3x}}{e^x+1};\ \ C_3' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{e^x+1}$$

Интегралдап, мына теңдіктерді аламыз:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int\frac{e^x}{e^x+1} = -\frac{1}{2}\int\frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1} = -\frac{1}{2}\ln\left(e^x+1\right);$$

$$C_2 = \frac{1}{6}\int\frac{e^{3x}dx}{e^x+1} = \frac{1}{6}\int\frac{e^{2x}d\left(e^x\right)}{e^x+1} = \frac{1}{6}\int\left(e^x - 1 + \frac{1}{e^x+1}\right)de^x;$$

$$C_3 = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{e^x+1} = \frac{1}{3}\int\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}dx = \frac{1}{3}\int\left(1-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\left(x - \int\frac{d\left(e^x+1\right)}{e^x+1}\right) = \frac{1}{3}\left(x - \ln\left(e^x+1\right)\right)$$

Онда теңдеудің дербес шешімі:

$$y^* = -\frac{1}{2}e^x\ln\left(e^x+1\right) + \frac{1}{6}e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{2x} + \ln\left(e^x+1\right)\right) + \frac{1}{3}e^{2x}\left(x - \ln\left(e^x+1\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{12}e^x - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}xe^{2x} + \left(\frac{1}{6}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{3}e^{2x}\right)\ln\left(e^x+1\right).$$

Ал, теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + \frac{1}{2}\left(4xe^{2x} + e^x - 2\right) + \frac{1}{6}\left(e^{-x} - 3e^x - 2e^{2x}\right)\ln\left(e^x+1\right).$$